TD n°13 : Espaces vectoriels

Exercice 1.

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - 7y = z\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 - z^2 = 0\}$
3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = x + y + z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice 2.

1. Montrer que les deux ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$:
$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(0) = P'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(0) = P(1) = P(2) = 0\}.$$
2. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, deg(P) = 3\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}[X]$? Sinon, quel est le plus petit sev de $\mathbb{R}[X]$ contenant E ?

Exercice 3.

On note $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$?

$A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$, $\quad B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, u_0 = u_3 = 0\}$;
$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique}\}$, $\quad D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
$E = \{(u_n)_{n\in\in\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}$, $\quad F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.

Exercice 4.

On note $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$A = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f \text{ paire}\}$, $\quad B = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(2) = f(5) = 0\}$
$C = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f \text{ continue}\}$, $\quad D = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f \text{ croissante}\}$

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6.

On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,-1,2)$ et $e_2 = (1,1,-1)$.

1. Montrer que les vecteurs $u = (3,1,0), v = (-1,-3,4), w = (1,-5,8)$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2.
2. Qu'en est-il des vecteurs $x = (4,1,0), y = (10,-4,11), z = (10,-2,9)$?
3. Plus généralement, déterminer $\text{Vect}(e_1,\, e_2)$.

Exercice 7.

On considère les vecteurs $u = (-4,4,3)$, $v = (-3,2,1)$, $s = (-1,2,2)$ et $t = (-1,6,7)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $u \in \text{Vect}(s,t)$ et $v \in \text{Vect}(s,t)$. En déduire que $\text{Vect}(u,v) \subset \text{Vect}(s,t)$.
2. Montrer alors que $\text{Vect}(u,v) = \text{Vect}(s,t)$.

Exercice 8.

Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $x = (1,2,1)$, $y = (1,0,1)$ et $z = (k,2,3)$. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $z \in \text{Vect}(x,y)$.

Exercice 9.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, le vecteur $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = (X+1)^2$ et $P_3(X) = X^3$?

Exercice 10.

Dans $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, le vecteur $u = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v' = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 11.

Soit $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (2,1,3)$ et $v_3 = (0,-1,5)$. La famille (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

Exercice 12.

Les familles suivantes sont-elles libres dans l'espace vectoriel E indiqué ?

Dans $E = \mathbb{R}[X]$: 1. $(3X, X^2-1, X^3)$ 2. $(X+1, X-1)$ 3. $(X^2-1, 2X^2+1, X^2+X)$.

Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: 4. $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}})$ 5. $(n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: 6. $(x \mapsto x, x \mapsto |x|)$ 7. $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos^3(x))$.

Exercice 13.

Déterminer l'ensemble des réels k tels que la famille $((1,k,2), (-1,8,k), (1,2,1))$ soit une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14.

1. Montrer de deux manières différentes que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,2,1)$, et $e_3 = (2,3,2)$. Déterminer alors les coordonnées du vecteur $X = \big(0,1,-2\big)$ dans cette base.
2. Même question avec $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (2,0,-1)$, $e_3 = (2,1,1)$, et $X = (1,-2,-1)$.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{ll} 2x+y+z & = 0 \\ 4x+y & = 0 \end{array} \right. \right\}$, ensemble solution du système linéaire associé.

Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

Exercice 16.

Pour chacun des systèmes suivants, justifier que l'ensemble solution $\mathcal{S}$ est un sev de ..., et en déterminer une base.

$\mathbb{R}^3 : \left\{ 3x+y-z = 0 \right.$ $\mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{lllll} 2x & & -3z & +t & = 0 \\ x & +y & +z & -t & = 0 \\ & -2y & -5z & +3t & = 0 \\ 3x & +y & -2z & & = 0 \end{array} \right.$ $\mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{ll} x+2y-z & = 0 \\ -2x-3y+3z & = 0 \\ x+y-2z & = 0 \end{array} \right.$

Exercice 17.

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,2,-1)$, $(3,-1,2)$, $(4,1,1)$, $(2,-3,3)$.
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $(3,1)$, $(1,1)$, $(-2,-2)$, et $(2,0)$.

Exercice 18.

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de .... et en déterminer une base :

$E_1 = \{bX^2 + aX - a, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = P'(0)\}$

$E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $E_4 = \mathrm{Vect}(2X+1, X+3, 4X+7)$

$E_5 = \mathrm{Vect}((n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2n+1)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 19.

On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ la famille $\mathcal{B} = \big(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Déterminer les coordonnées de $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ dans cette base.

Exercice 20.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les 4 matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A,B,C,D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de E.

Mêmes questions avec $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0\}$ puis $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 22.

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.